Avant propos :

Rappel des 6 compétences à travailler en maths : modéliser, chercher, raisonner, calculer et communiquer.

Introduction

Analyse de production d'élèves dans un problème de type parties-tout

- Stratégie 1 : Dénombrement plutôt élémentaire = constitution effective des collections (pas d'anticipation du résultat mais seulement constat après comptage ou surcomptage).
- Stratégie 2 : dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques ou des abstractions (optimisation du dénombrement des quantités en surcomptant ou décomptant/ organisation des collections qui révèle une montée en abstraction/ lecture du résultat = constat)
- Stratégie 3 : Stratégie de calcul (plus ou moins explicitées et formalisées)

Dans ce type de problème, l'élève doit pouvoir proposer une réponse juste exprimée sous forme d'une écriture additive ou soustractive traduisant la relation existant entre les 3 nombres.

Travail du professeur : penser à une progression dont l'objectif est de permettre à un élève lisant un énoncé de reconnaître (explicitement ou implicitement) le modèle sous-jacent et de mette en œuvre les procédures permettant de le résoudre (Attention : le but n'est pas d'enseigner une classification formelle de problèmes élémentaires mais d'amener les élèves à reconnaître progressivement différents problèmes pouvant relever des structures additives et multiplicatives et d'automatiser la reconnaissance de l'opération).

La taille des nombres en jeu constitue un élément important permettant de faire évoluer les procédures des élèves. Des grands nombres rendent les stratégies de dénombrements coûteuses et peuvent favoriser le recours au calcul.

L'élève doit avoir mémorisé les faits numériques susceptibles d'être convoqués. Travail du professeur : ménager des moments de calcul mental et des moments de travail des techniques de calcul en ligne afin de constituer un répertoire suffisant de faits numériques pouvant être rappelés à bon escient lors de la résolution de problèmes (compléments à 10, double, …).

La résolution de problèmes est donc à mettre en relation avec l'enseignement de la numération et du calcul.

Principe pour élaborer une progression : penser une alternance entre moments de découverte, d'exploration des décompositions des nombres, mises en relation de ces connaissances avec des techniques de calcul (mentales ou en ligne puis posées), et moments de résolution d'un type de problème.

Objectif : amener progressivement l'élève à faire le calcul en utilisant les symboles des nombres. Etape déterminante en CP : passer d'une procédure de dénombrement (comptage, surcomptage ou décomptage) à la traduction en écritures additives ou soustractives.

Exemple de deux cheminements cognitifs

Exemple 1 : Du surcomptage au calcul, de l'énoncé du résultat à la modélisation.

Objectif : amener les élèves qui ont mobilisé une procédure de surcomptage à passer progressivement et par étapes à des procédures de calcul.

1. Passage de la manipulation d'objets au surcomptage sur des schémas : en mettant en évidence des points de ressemblance dans la démarche (proposer des objets physiques de plus en plus simples (cubes, rectangles, …) puis en épurant progressivement le dessin), uniquement lorsque la manipulation est maitrisée.
2. Passage du surcomptage (oral) à l'écriture des nombres en chiffres : recours à la frise ou à la ligne numérique qui permet de mettre en relation le dénombrement un à un des objets avec leur écriture chiffrée (étape non obligatoire).
3. Passage du surcomptage s'appuyant sur des écritures chiffrées au surcomptage avec appui sur la frise numérique.
4. Passage du surcomptage sur la frise numérique à celui d'un calcul par bons sur cette frise numérique ou sur une ligne numérique.
5. Passage du calcul sur la frise numérique ou sur une ligne numérique à des procédures faisan intervenir des écritures formelles (en lien avec une automatisation progressive des faits numériques associés).

Remarque : la déclinaison de ces différents passages ne constitue pas des étapes obligatoires pour tous les élèves.

Exemple 2 : du décomptage au calcul

Objectif : optimiser progressivement les procédures de décomptage pour déboucher sur des procédures de calcul se traduisant par des écritures soustractives.

Etapes analogues à l'exemple ci-dessus.

Lors des moments de synthèse et d'institutionnalisation, le professeur s'attache à faire expliciter les productions d'élèves. Quand il le juge possible, le professeur hiérarchisera les procédures mises en œuvre en prenant en compte leur efficacité et leur économie afin de montrer qu'elles ne se valent pas toutes (limiter le nombre de procédures exposées, exposer obligatoirement la ou les procédures efficaces, permettre à l'élève de se repérer dans la hiérarchie de procédures).

Ces institutionnalisations doivent s'appuyer sur des écrits, dès que les performances des élèves dans le domaine de la lecture et de l'écriture le permettent).

Ces moments d'institutionnalisation sont aussi l'occasion d'identifier les énoncés qui relèvent d'un même type de problème.

En cas d'erreur : En individuel : attirer l'attention de l'élève sur la pertinence de sa réponse ; en collectif : proposer l'ensemble des réponses des élèves au tableau et demander à la classe quelles sont les réponses qui ne sont pas acceptables.

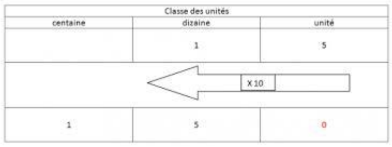
Chapitre I : Quels systèmes de numération enseigner, pourquoi et comment ? (pages 23 à 48)

Acquis de maternelle : nommer les nombres jusqu'à 30, via la comptine numérique en français, sans pour autant savoir les écrire en chiffres.

2 systèmes de numération objets d'enseignement au CP

Objectifs:

- Appréhender les aspects décimaux et positionnels des écritures chiffrées;
- Apprendre le nom des nombres en repérant la structure dans la comptine numérique.

NUMERATION ORALE	NUMERATION ECRITE CHIFFREE
nécessaire pour appréhender le calcul mental.	nécessaire pour appréhender le calcul posé.
Structure de la numération orale  GC: grande comptine (de un à dix-neuf); PC: petite comptine (de un à neuf). Comparer des quantités en utilisant la PROCÉDURE « NOM DU NOMBRE PAR COMPTAGE UN À UN » Obtenir le nom du nombre de points de chaque collection puis utiliser ces noms pour comparer les quantités (ordre d'arrivée dans la comptine numérique). Cette procédure ne nécessite pas d'utilisation de l'écriture chiffrée.	⚠ La numération écrite chiffrée n'est pas la version écrite de la numération orale. Système de numération écrit chiffré = système de désignation des nombres qui utilise 10 symboles (une suite de chiffres alignés va désigner un nombre selon un principe décimal et un principe positionnel). 1d = 10 u 1c = 10d 1m = 10 c  Au CP, on n'est pas obligé de parler de centaine, par contre on peut envisager plus de dix dizaines dans les nombres.
La comptine des dizaines peut être employée pour faciliter le dénombrement. Remarquer qu'entre 2 repérants, il y a une ou deux dizaines d'écart.	Nécessité de comprendre la dizaine comme: – une nouvelle unité de dénombrement. – un synonyme de "dix". PROCÉDURE: « ÉCRITURE CHIFFRÉE » Organiser chaque collection en un maximum de dizaines, puis la coder à l'aide de l'écriture chiffrée. On écrit le nombre d'éléments en accolant dans l'ordre conventionnel le chiffre indiquant le nombre de dizaines et celui indiquant le nombre d'éléments restants. Ensuite on conclut en comparant les écritures ainsi obtenues L'utilisation du nom des nombres, au-delà de dix, n'est pas nécessaire.
En dénombrement: le dernier nom de nombre prononcé est la mémoire de la totalité d'objets: on utilise les ressorts de l'aspect ordinal pour accéder à l'aspect cardinal.	Aspect cardinal du nombre.

D'autres représentations: constellations; doigts de la main, ... ne permettent pas de faire des calculs aussi efficacement que les 2 systèmes de numération mais aident aux premiers apprentissages numériques.

Apprendre et enseigner les systèmes de numération

dénombrements / estimation / comparaisons de quantités

⍰ PROCÉDURE « NOM DU NOMBRE PAR COMPTAGE DE DIX EN DIX »

Obtenir le nom du nombre en considérant le maximum de dizaines, ce qui permet de recourir à la comptine des dizaines (dix, vingt, trente, etc.) puis à celle de un en un pour les éléments restants. L'utilisation de l'écriture chiffrée n'est pas nécessaire.

⍰PROCÉDURE « ÉCRITURE CHIFFRÉE »

Organiser la collection en un maximum de dizaines, puis la coder à l'aide de chiffres. On écrit avec un chiffre le nombre de dizaines et avec un autre celui des éléments restants. On accole ensuite ces chiffres dans l'ordre conventionnel. L'utilisation du nom du nombre n'est pas nécessaire.

Rôle du professeur: amener les élèves à disposer de ces 2 procédures pour effectuer un dénombrement, avec la nécessité de verbaliser les avantages et les inconvénients.

Deux procédures qui permettent d'accéder à deux désignations différentes du nombre de manière indépendante. Les élèves de CE1 et CE2 (recherche récente) obtiennent l'écriture chiffrée le plus souvent à partir du nom du nombre et non via la procédure « écriture chiffrée). Ils comptent de un en un (utilisation des groupements de dix assez rare) et obtiennent le nom du nombre qu'ils cherchent à écrire avec des chiffres comme ils feraient en français en s'appuyant sur les sons qu'ils entendent (soixante-huit →608)

⚠ Ces procédures sont particulièrement performantes quand la collection est partiellement organisée en dizaines (exemple: 5 dizaines et 18 éléments restants).

Fiche: La dizaine au cœur des itinéraires d'enseignement.

2 itinéraires d'enseignement

- Premier itinéraire = enseigner la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale. Il s'agit le plus souvent de justifier des écritures que les élèves connaissent déjà. Dans ce cas-là, on suit les procédures précédentes dans l'ordre.

Les noms des nombres sont généralement directement associés à leur écriture chiffrée.

Programmation annuelle : le champ numérique pour aborder les deux systèmes de numération est tout d'abord le même puisque les écritures chiffrées sont « extraites » des noms des nombres. Mais une fois les principes de la numération écrite chiffrée établis, les écritures chiffrées peuvent alors être travaillées directement jusqu'à 100, sans attendre que la comptine numérique soit complètement acquise par les élèves.

- Second itinéraire = construire les deux systèmes de numération de manière indépendante pour ensuite construire des liens. Dans ce cas-là, on utilise directement la procédure « écriture chiffrée ».

Rq : confronter les élèves à des quantités suffisamment grandes pour atteindre des nombres dont ils ne connaissent pas de manière l'écriture chiffrée (au-delà de cinquante). Ces nombres peuvent être désignés à l'oral en utilisant les unités de numération, comme par exemple 6 dizaines et 8 unités.

Les noms des nombres et leur écriture chiffrée sont reliés a posteriori de leur découverte.

Programmation annuelle : Dès le début, l'enseignement des deux systèmes de numération ne concernera pas le même champ numérique : la numération écrite chiffrée peut être en effet construite directement pour les nombres jusqu'à 100 en fin de période 2.

Pour travailler la dizaine, il faut faire percevoir aux élèves qu'une dizaine et dix désignent le même nombre. Le matériel permet de dissocier et d'associer des éléments (cubes emboitables). Il est souhaitable de ne pas parler de dizaines uniquement quand les objets sont assemblés.

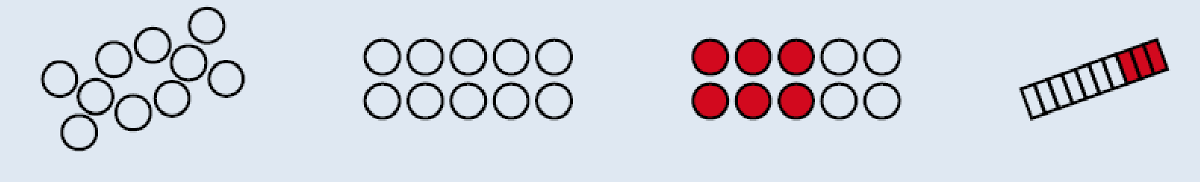


Figure 4. Différentes représentations de la dizaine.

Lire et écrire les nombres

Il s'agit ici de proposer des liens de traduction entre les deux systèmes de numération en respectant la structure de chacune. La numération écrite chiffrée ne doit pas apparaître comme la version écrite de la numération orale. Une première possibilité est alors l'emploi d'une frise numérique linéaire. Les sept sections de la frise de la figure 5 sont à afficher sur les murs les unes après les autres, constituant alors une unique file (et non un tableau).

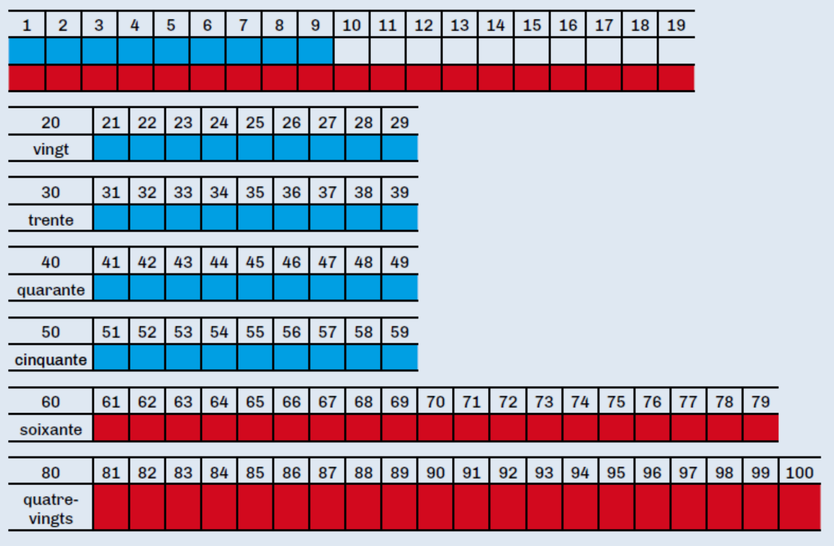


Figure 5 . Exemple de frise numérique. Les sept sections, découvertes et assemblées au fur et à mesure de l'année, forment une unique file.

Pour connaître le nom du nombre qui s'écrit ≪ 72 ≫, il s'agit de repérer ≪72 ≫ sur la frise et de remonter au premier repérant de la section qui est ici ≪soixante ≫. Il suffit alors de compter à partir de cette case, soixante, soixante-et-un, etc. et de s'arrêter à la case ≪72 ≫ pour obtenir la réponse ≪ soixante-douze ≫. Une deuxième possibilité, sans frise numérique, est cependant à enseigner : 72, c'est par définition sept dizaines et deux unités. Il est alors possible de réaliser la collection en utilisant par exemple le matériel usuel de numération de la classe. Ensuite il suffit d'utiliser la procédure ≪nom du nombre par comptage de dix en dix ≫ pour obtenir la réponse. Un processus analogue permet de résoudre le problème inverse : trouver l'écriture chiffrée du nom du nombre. Il suffit de réaliser la collection organisée à l'aide de la comptine des dizaines, puis d'utiliser la procédure ≪écriture chiffrée ≫ pour la dénombrer.

Les unités de numération

Elles sont utilisées pour construire le système de numération chiffré.

Par la suite, elles permettent de « parler » des écritures chiffrées sans forcément avoir à prononcer le nom des nombres.

Une fois la numération écrite chiffrée construite elles permettent de travailler l'aspect positionnel ou/et l'aspect décimal, par exemple en demandant d'écrire en chiffres les nombres suivants :

— 5 dizaines 6 unités (ni l'aspect positionnel, ni l'aspect décimal ne sont travaillés) ;

— 6 unités 5 dizaines (qui met en jeu l'aspect positionnel) ;

— 4 dizaines 16 unités (qui met en jeu l'aspect décimal) ;

— 16 unités 4 dizaines (qui met en jeu l'aspect positionnel et l'aspect décimal).

Décompositions (s) et numération(s)

Plusieurs décompositions sont envisageables. La question est celle de la désignation utilisée pour les faire : le nom du nombre ou écriture chiffrée.

Exemple : 56 = 5 dizaines et 6 unités

= cinquante-six

= 4 dizaines et 16 unités

= 50+ 6

= 10 +10 + 10 + 10 + 10 + 6 (avec appui sur la comptine des dizaines)

Quatre-vingt-dix-neuf ou cent et au-delà ?

Dans la comptine numérique, a partir de ≪ quatre-vingts ≫, on utilise la grande comptine de ≪ un à dix-neuf ≫pour atteindre cent : en classe, on peut donc prononcer le mot ≪cent ≫à ce moment.

L'écriture chiffrée ≪ 100 ≫ est introduite au CP, elle correspond à 10 dizaines 0 unité. (≪ 10 ≫ accole a ≪ 0 ≫). Son introduction permet de faire le lien entre centimètre et mètre, deux unités de longueur introduites au CP. Il est envisageable dès le CP d'écrire des nombres à trois chiffres, compris comme le codage d'une collection organisée en un nombre maximum de dizaines et d'unités restantes (12 dizaines et 3 unités s'écrit≪123 ≫,≪12 ≫accolé à ≪ 3 ≫), mais cela n'est pas une nécessité.

En résumé

- Il existe **deux systèmes de numération** dont il convient d'enseigner les principes propres à chacun. Les mots et les chiffres sont les signes constitutifs de chacun d'entre eux. La forme écrite de l'oral « quarante-deux » n'est pas l'écriture chiffrée « 42 ».

- **Deux grands types d'itinéraires** permettent d'enseigner les systèmes. En amont, la dizaine est à concevoir comme synonyme de « dix » et comme nouvelle unité de numération. **Deux procédures de dénombrement sont à enseigner de manière explicite :** l'une permet d'obtenir le nom du nombre sans nécessité de connaître son écriture chiffrée, l'autre permet d'obtenir l'écriture chiffrée du nombre sans nécessité de connaître son nom.

- **Les unités de numération** servent à désigner des quantités et permettent de travailler **l'aspect décimal et l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée**.

- Les comparaisons de collections peuvent servir d'appui à la construction des deux systèmes de numération. Les connaissances sont réutilisées dans diverses activités : représenter, comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres ; calculer. **Un « dialogue » peut s'instaurer entre des procédures** utilisant les ressources de l'un ou de l'autre système.

Chapitre II: Calcul et sens des opérations (pages 49 à 76)

L'ambition majeure de l'enseignement du calcul à l'école doit être le développement aisé de sa pratique, s'appuyant sur la mémorisation de faits numériques et l'apprentissage de procédures et d'algorithmes.

Quelles formes et modalités de calcul enseigner au CP?

calcul mental	calcul en ligne	calcul posé
= modalité de calcul sans recours à l'écrit	= modalité de calcul écrit ou partiellement écrit sans utilisation des algorithmes d'opérations posées	= modalité de calcul écrit qui requiert l'application d'un algorithme opératoire
Utilisation de la numération orale	Utilisation de la numération orale + numération écrite chiffrée	Utilisation de la numération écrite chiffrée
A travailler en premier lieu - place prépondérante dans l'enseignement du calcul		En période 3 ou 4 au plus tard: addition

Ces modalités de calcul mobilisent :

- des faits numériques = résultats de calculs mémorisés immédiatement disponibles.

FAITS NUMÉRIQUES	EXEMPLES
COMPLÉMENTS à 10	Combien faut-il ajouter à 7 pour avoir 10 ? 7 + ... = 10
DOUBLES des nombres ≤ 10, ainsi que des dizaines entières (jusqu'à 50)	7 + 7 = ? 20 + 20 = ? Quel est le double de 7 ? de 20 ?
MOITIÉS des nombres pairs ≤ 20	Quelle est la moitié de 18 ?
LES DÉCOMPOSITIONS ADDITIVES des nombres ≤ 10	Donner 5 décompositions de 9
TABLES D'ADDITION des nombres ≤ 10	6 + 3 = ? 3 + ... = 9 9 – 3 = ?

- des procédures élémentaires automatisées = traitements de calculs qui s'appuient sur des faits numériques mémorisés et mettent en jeu certaines propriétés des nombres ou des opérations (+1, -1, + 10, - 10, 20 + 7, les presque-doubles, ...).
- Des combinaisons de procédures.

Focus: l'apprentissage des tables d'addition.

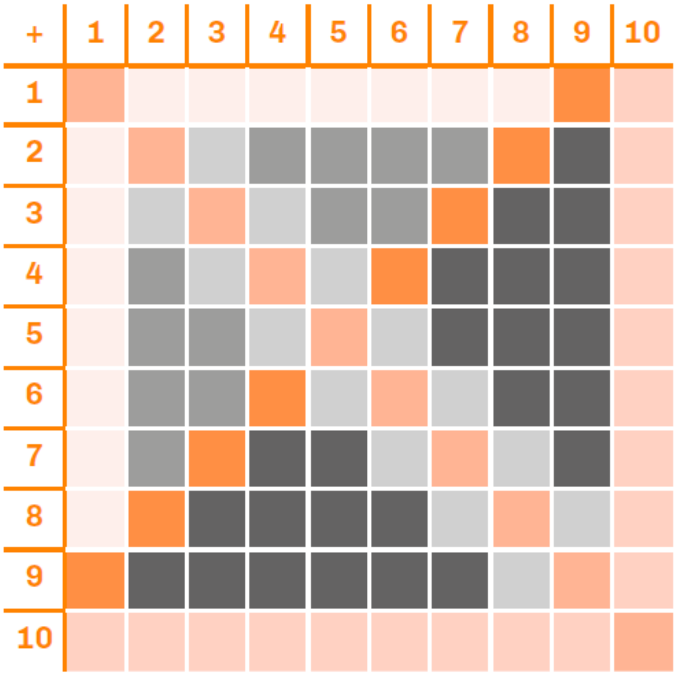


Figure 13. Table d'addition de Pythagore, un outil pour l'enseignant.

Le découpage proposé ci-contre (cf. figure 13) présente l'avantage de faire du lien avec la numération orale, la numération écrite (groupement par 10), le comptage, et permet d'installer, dès le CP, des stratégies de calcul variées (les presque-doubles, les additions à retenues) qu'il faudra entretenir. L'apprentissage des tables d'addition devient le résultat d'un long processus qui repose sur une élaboration progressive des résultats utilisant des points d'appui favorables à la mémorisation.

Le traitement par familles décrites ci-après permet aussi de construire une progressivité des apprentissages qui prend appui sur leur ordre d'introduction, qui va ici du clair vers le foncé (figure 14).

Cette proposition de progression débute par la famille n° 1 (les suivants) et se conclut par la famille n° 7 (le passage par le paquet de 10). Les apprentissages des familles (n° 1, 2, 3, 4 et 6) sont indépendants les uns des autres et les familles (n° 5 et 7) sont élaborées à partir des précédentes. Notons la symétrie dans la table de Pythagore qui exprime la commutativité de l'addition et permet de réduire le nombre de faits numériques à retenir.

L'apprentissage de chaque famille s'appuie d'abord sur l'utilisation et la manipulation de supports adaptés (cubes, frise numérique, cartes à points, etc.) qui permettent de construire, à l'aide de la verbalisation, des images mentales. Celles-ci pourront ensuite être évoquées et favoriser ainsi la mémorisation et l'installation du répertoire additif.

FAMILLES	EXEMPLES	FAITS NUMÉRIQUES OU PROCÉDURE ÉLÉMENTAIRE
1. Les suivants	3 + 1 5 + 1	Procédure élémentaire
2. Les règles de numération	10 + 5 10 + 7	Faits numériques
3. Les doubles	2 + 2 3 + 3	Faits numériques
4. Les compléments à 10	2 + 8 4 + 6	Faits numériques
5. Les presque-doubles	4 + 5 6 + 7	Procédure élémentaire
6. Les sommes inférieures à 10	3 + 6 7 + 2	Faits numériques
7. Le passage par 10	7 + 5 6 + 8	Procédure élémentaire

Figure 14. Les différentes familles de calculs.

FAMILLE N° 1. LES SUIVANTS : LES CALCULS EN + 1

Il s'agit dans un premier temps d'expliciter le fait qu'« ajouter un » revient à dire le suivant (« *je connais quatre plus un, c'est celui qui vient après quatre, c'est cinq* »). Le professeur choisira le vocabulaire qui convient aux compétences de ses élèves (après/avant, suivant/précédent ou successeur/prédécesseur). Cet apprentissage s'appuie sur la connaissance de la comptine numérique et relève de la numération orale (cf. chapitre 1). On pourra ensuite étendre cette famille aux calculs en + 2.

FAMILLE N° 2. LES CALCULS EN + 10

Ces calculs additifs prennent appui sur la compréhension des premiers nombres à deux chiffres. Il s'agit de comprendre que « deux plus dix égal douze » s'écrit 2 + 10 = 12. Certaines difficultés des élèves peuvent venir du fait que le nom des nombres de 11 à 16 ne reflète pas leur écriture. Ce sont bien ici des connaissances en numération (orale et écrite) qu'il faut mobiliser.

FAMILLE N° 3. LES DOUBLES

Les doubles sont des faits numériques rappelés de façon plus sûre et plus rapide que les autres résultats. Leur mémorisation présente peu de difficulté et ils seront mobilisés fréquemment dans des calculs plus complexes. On utilisera progressivement les deux expressions « 8 plus 8 » et « 2 fois 8 ».

FAMILLE N° 4. LES COMPLÉMENTS À 10

Comme pour les doubles, il faut installer cette connaissance et l'entraîner tout au long de l'année de CP. Cette organisation en familles implique des choix, comme celui de travailler 5 + 5 = 10 comme un double ou comme un complément à 10 (5 + ? = 10).

FAMILLE N° 5. LES PRESQUE-DOUBLES

Une fois les doubles installés, il est intéressant d'utiliser ces résultats pour calculer les presque-doubles. Le professeur propose par exemple 6 + 5 en calcul mental. En utilisant les connaissances travaillées précédemment, les élèves peuvent proposer les stratégies suivantes : 6 + 5 = 6 + 6 – 1 = 12 – 1 = 11 ou 6 + 5 = 1 + 5 + 5 = 1 + 10 = 11. Le professeur devra valoriser ces deux stratégies (utiles pour des nombres plus grands), les institutionnaliser et les faire vivre dans la classe (cf. focus « Une séquence de calcul », p. 73).

FAMILLE N° 6. LES SOMMES INFÉRIEURES À 10

C'est le comptage ou surcomptage qui va permettre d'installer la mémorisation de ces faits numériques. L'usage du surcomptage, qui repose sur la maîtrise de la suite des nombres et la capacité à la réciter à partir de n'importe quel point de départ, ne sert qu'à installer les procédures qui seront automatisées par la suite.

FAMILLE N° 7. LE PASSAGE PAR 10

La procédure de passage par 10 s'appuie sur la connaissance des compléments à 10 (famille 4), la décomposition additive des nombres inférieurs ou égaux à 10 (famille 6) et les calculs en + 10 (famille 2). Par exemple, le calcul de 8 + 5 s'appuie sur 8 + 2 = 10 et sur 5 = 2 + 3, pour finalement conduire à 10 + 3 = 13. Le fait numérique 8 + 5 = 13, s'il est fréquemment réactivé, peut ensuite lui-même être mémorisé.

L'utilisation de la propriété de **commutativité** permet de réduire de manière significative la quantité de résultats à mémoriser. Toutefois, cette propriété ne peut prendre son sens qu'en situation et n'a pas à être imposée. Cependant, il est important que cette propriété soit enseignée et explicitée ; le professeur pourra dire et faire dire que, dans une addition, on peut changer l'ordre des nombres. Cette propriété devra ensuite être travaillée régulièrement en proposant par exemple des additions au tableau et en demandant leur réécriture sur ardoise dans le sens le plus économique au calcul, c'est-à-dire en mettant en premier le plus grand des deux nombres. Enfin, il faudra que les élèves automatisent l'usage de cette propriété car il s'agit d'une procédure élémentaire qui devra être mobilisable très rapidement.

La présentation sous forme de tableau à double entrée peut s'avérer complexe pour des élèves de CP qui auraient du mal à s'y repérer. Les exemples ci-contre sont des écrits qui peuvent être utilisés au fur et à mesure de la découverte des différentes familles (cf. figures 15, 16 et 17).

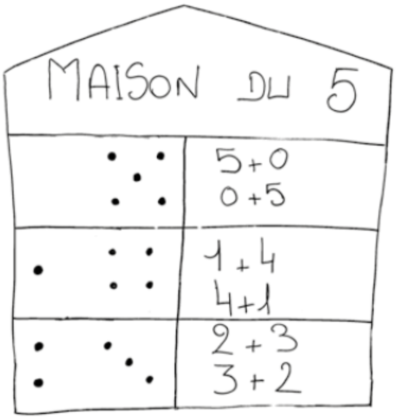


Figure 15. Affichage de la maison du 5.

Table de 5

5 + 0 = 5

5 + 1 = 6

5 + 2 = 7

....

5 + 10 = 15

Figure 16. Affichage de la table d'addition.

+	1	2	3	4	5
1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4	1 + 4 = 5	1 + 5 = 6
2	2 + 1 = 3	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7
3	3 + 1 = 4	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8
4	4 + 1 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9
5	5 + 1 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10

Figure 17. Affichage d'un extrait de la table de Pythagore.

Comment passer du comptage au calcul?

Un des enjeux du CP est de passer des procédures de comptage aux procédures de calcul, en prenant appui sur les apprentissages de maternelle.

Cf: la situation de la boite (page 53) qui contraint l'élève à anticiper ce que devient la quantité lorsqu'elle subit une augmentation.

Appropriation **Matériel disponible et jetons visibles.** Procédures de dénombrement élémentaire.	***Temps 1*** **Blocage de la manipulation, utilisation d'outils.** Procédures de dénombrement élémentaire.	***Temps 2*** **Blocage de la manipulation, limitation des outils.** Procédures de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques.	***Temps 3*** **Absence de manipulation et d'outils.** Procédures relevant du calcul.

Le retour au matériel permet la validation des procédures.

Processus d'ABSTRACTION

Figure 11. Schéma des différents temps de la situation de la boîte.

Le codage mathématique (3+4=7) sera introduit par le professeur lors du bilan.

Le retour au matériel permet la validation des procédures. Cette progression permet de développer le processus d'abstraction.

Le rôle de la manipulation est articulé avec celui de la verbalisation qui permet à l'élève de décrire et d'expliquer sa procédure. La verbalisation est provoquée par le maître : comment le sais-tu ? Comment es-tu sûr de la solution ? Comment peux-tu vérifier ?

Progression:

P1: nombres jusqu'à 10 ; résolution de problèmes : ajout / retrait avec recherche de la quantité finale;

P2: nombres jusqu'à au moins 20; ; résolution de problèmes : ajout / retrait avec recherche de la quantité finale;

à partir de P3: ; résolution de problèmes parties-tout avec recherche d'une partie.

Quelles opérations enseigner au CP?

Rôle du professeur en CP = développer l'acquisition du sens des 4 opérations.

L'addition et la soustraction	La multiplication et la division
L'apparition des symboles mathématiques + et - relève du CP. Les opérations mathématiques, addition et soustraction, sont introduites simultanément via la résolution de problèmes, les écritures symboliques sont introduites dans un temps assez proche. L'apparition du signe = relève aussi du CP. Attention « = » ne traduit pas seulement le résultat d'un calcul. Mathématiquement « = » signifie que les deux termes de l'égalité sont des représentations différentes d'un même nombre. L'algorithme opératoire de l'addition relève du CP (soustraction en CE1).	L'approche de ces opérations débute par un travail manipulatoire sur des objets (partage équitable; doubles = multiplication par 2, moitiés = division par 2, les nombres rectangles = produits d'entiers strictement plus grands que 1, comme 6 = 2 x 3; 12 = 3 x 4, ...). La symbolisation et l'apparition du symbole mathématique X peuvent être proposés en fin de CP à partir des doubles ou des décompositions additives, mais ne sont pas un attendu de fin de CP. Attention : signe « X » peut être proposé en fin de CP mais ce n'est pas un attendu de fin de CP. Le signe mathématique sera introduit par la verbalisation et l'usage du mot « fois ». L'introduction du signe : est prématuré en CP. Les algorithmes opératoires de ces opérations ne relèvent pas du CP (multiplication en CE2 et division en CM1).

Les habilités en calcul peuvent se manifester dans l'estimation de l'ordre de grandeur d'une quantité:

QUEL EST LE NOMBRE LE PLUS PROCHE ?

17 + 4 = ?	17 – 5 = ?	35 + 27 = ?
20 30 40	10 20 30	40 50 60

Comment enseigner l'addition posée ?

Le calcul posé représente une tâche complexe qui donne l'occasion de réinvestir à la fois les faits numériques et les connaissances de la numération écrite chiffrée déjà acquis par les élèves:

- l'aspect positionnel permet de donner du sens à l'alignement des chiffres rang par rang. " On aligne les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines" est à privilégier et non pas "n aligne les chiffres à droite" qui pourra être source d'erreurs lors de la mise en œuvre de cet algorithme avec les nombres décimaux.
- l'aspect décimal permet de revenir sur les unités de numération (10 unités = 1 dizaine) pour comprendre ou justifier la ou les retenues.
- Les cas des calculs posés avec et sans retenue seront traités simultanément.

On peut, lors du déroulement de l'algorithme (cf. figure 18), oraliser les unités de numération : « *5 unités plus 7 unités cela fait 12 unités, c'est-à-dire 2 unités plus 1 dizaine que je mets en retenue, puis 1 dizaine plus 2 dizaines plus 3 dizaines, cela fait 6 dizaines* ».

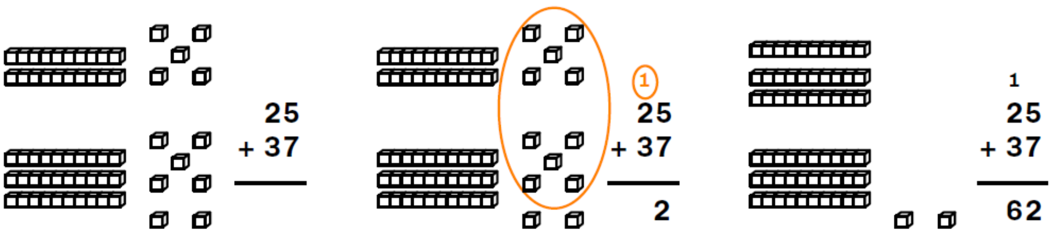


Figure 18. Explicitation de l'addition posée à l'aide d'un matériel de numération.

LES OUTILS DE LA TRACE ÉCRITE POUR LES TROIS FORMES DE CALCUL

— L'**ardoise** est un outil facilitant l'entraînement des élèves et la prise d'informations par le professeur. Par l'aspect éphémère de son écrit, elle autorise l'élève à se tromper et facilite son engagement dans la tâche. Elle se révèle particulièrement utile pour travailler l'automatisation de procédures. Néanmoins, l'ardoise ne garde pas de trace de l'évolution des connaissances des élèves et l'évaluation qu'elle permet ne peut être précise. Elle ne doit donc pas être l'unique voie utilisée pour la production écrite mathématique.

— Le **cahier de brouillon ou d'essais** permet à l'élève de garder trace de ses procédures, procédures que le professeur pourra aussi analyser *a posteriori*. Lors de la phase de mise en commun, une sélection des réponses proposées sur les cahiers d'essais peut être projetée grâce à un visualiseur. Cela a pour effet d'alléger la tâche des élèves qui n'ont plus en charge la production d'affiches lisibles par l'ensemble de la classe. L'emploi de tablettes peut faciliter cette étape.

— Le **cahier de leçons** est un cahier-outil dans lequel sont consignés les résultats à connaître et à mémoriser (faits numériques, procédures élémentaires) ainsi que l'algorithme de l'addition posée. Ce sont des écrits proposés par le professeur, le plus souvent construits collectivement, en synthèse des temps de travail.

— Des écrits construits dans la classe de façon collaborative (l'explicitation d'une stratégie de calcul à retenir par exemple) peuvent être réalisés au **tableau** et/ou conservés sur **affiches**.

— Le **cahier du jour** consigne les productions de l'élève.

Quelques difficultés fréquentes autour du calcul

Difficulté…	**Remédiation**		
	Faire verbaliser	**Varier les outils de modélisation**	**Mobiliser le jeu**
….à comprendre le langage symbolique du calcul 8+7=15+3+18	Explique-moi comment tu fais 4+3?	cubes, cartes à points	-jeu de déplacement sur piste proposé avec 2 dés dans lequel les dés traditionnels seront progressivement remplacés par de à écriture chiffrée. - bataille, loto, ... -jeu du saladier.
… à mémoriser et mobiliser le répertoire additif (procédure de comptage avec les doigts)	Lui demander comment il pourrait faire sans utiliser les doigts	Construction d'images mentales à partir d'outils (cubes, constellation de points, cartes à points, cartes rapides)	cf chapitre 5
…. à réaliser une addition posée (erreurs dans la disposition des chiffres ou erreurs de gestion de retenue).	faire expliciter sa démarche. faire verbaliser l'élève lors du déroulement de l'algorithme en utilisant les unités de numération.	Usage du tableau de numération. Usage du matériel de numération de référence. Mise à disposition des tables d'addition.	

Focus | Une séquence de calcul

Le calcul mental et le calcul en ligne doivent faire l'objet d'une pratique quotidienne d'au moins 15 minutes. On privilégiera, dans le cadre de plans de séquences, l'alternance de séries de séances courtes (10-15 minutes) avec des séances longues (30-45 minutes).

Organisation d'une séance longue de calcul

Une séance **longue** de calcul peut être organisée selon les trois temps ci-dessous, une séance courte se limite aux temps 1 et 2.

TEMPS 1	**Échauffement :** activité très courte (max. 5 min) pour réactiver des faits numériques ou relations entre les nombres déjà mémorisés. Elle vise la réussite de tous.
TEMPS 2	**Entraînement :** activité de mémorisation des faits numériques ou de mobilisation de procédures élémentaires. Différentes modalités de travail (procédé Lamartinière, application en ligne comme Plickers par exemple, jeux, petits problèmes, etc.) peuvent être proposées.
TEMPS 3	**Recherche :** activité qui nécessite un temps de recherche individuel des élèves et qui autorise l'usage de l'écrit. Elle donne lieu à une explicitation et hiérarchisation des procédures.

En résumé

- **L'ambition de l'enseignement du calcul au CP est de développer une pratique aisée du calcul** sous ses différentes formes (calcul mental, en ligne, posé), s'appuyant sur des faits numériques à mémoriser et des procédures élémentaires à automatiser. Il articule un travail à la fois fréquent sur les nombres, leurs propriétés et les opérations, mais aussi sur une gradation de la difficulté rencontrée. Il convient de donner au **calcul mental et au calcul en ligne une place prépondérante** dans l'enseignement du calcul.

- La **manipulation** et la **verbalisation** jouent des rôles essentiels dans le processus d'**abstraction**, notamment en favorisant la compréhension du sens de l'opération et l'introduction progressive du symbolisme (+, -, =).

- L'**institutionnalisation** des apprentissages en calcul mental et calcul en ligne doit faire l'objet d'une attention particulière. Il est nécessaire de hiérarchiser les procédures mises en place par les élèves, de débattre et de statuer sur leur portée. Ces éléments constituent alors une **trace écrite** claire dans les cahiers des élèves.

Chapitre III: Résolution de problèmes et modélisation (pages 77 à 102)

Programmes C2 : « La résolution de problème (RDP) est au centre de l'activité mathématique des élèves ». « Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ».

La RDP est à débuter dès le début de CP même si les élèves ne sont pas encore autonomes en lecture.

Triple objectif :

- Apprendre à résoudre des problèmes
- Aborder de nouvelles notions et consolider des acquisitions
- Développer capacités à chercher, raisonner, communiquer (compétences transférables dans d'autres disciplines)

Synthèse du guide fondé sur l'état de la recherche (réalisée par le groupe maths Savoie)
Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes en CP

→ Tout au long de la scolarité, le travail doit être structuré et régulier pour :

- Comprendre le problème posé
- Etablir une stratégie pour le résoudre
- Mettre en œuvre cette stratégie
- Revenir sur la solution et prendre du recul sur le travail fourni

Attendus de fin de CP en RDP :

Champ additif	Champ multiplicatif
- résoudre des problèmes additif et soustractifs en une ou deux étapes. - modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écriture mathématiques - connaître le sens des signes « + » et «-«	- résoudre des problèmes de multiplication ou de division en une étape, sur des petits nombres, avec le recours de la manipulation

De quels problèmes parle-t-on ? voir des exemples p. 80 et 81

Problèmes basiques (élémentaires) En proposer une grande variété aux élèves pour analyser avec eux leurs ressemblances→rôle prépondérant de la schématisation	-problèmes à deux données où il faut en déterminer une troisième -problèmes pouvant être résolus à partir de données explicites de l'énoncé avec un seul type d'opération (pb arithmétique à une étape)
Problèmes complexes Permettent de tester la disponibilité des connaissances et compétences acquises, favorise un retour sur les pb basiques→allers-retours entre les pb basiques et les pb complexes. Proposer ce type de problèmes dès le début du CP (B.O n°3 2018) Un pb complexe peut devenir basique pour un élève dès lors qu'il sait le résoudre en sautant implicitement des étapes.	- agrégats de pb basiques → résolution à plusieurs étapes - impose de savoir résoudre les problèmes basiques sous-jacents - connecter les informations pour construire le(s) sous problème(s) basique(s)
Problèmes atypiques Relèvent de stratégies spécifiques à expliciter pour développer des compétences transférables	- pour apprendre à chercher - non routiniers - pas de stratégie à priori pour les résoudre

Les fondamentaux de la démarche d'enseignement de RDP (maternelle/cycle 2)

Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

Abstraction →mobilisation de compétences de haut niveau (raisonnement et modélisation en RDP) ; suppose la maîtrise du langage symbolique associé.

Abstraire : opération mentale qui consiste à isoler une ou plusieurs propriétés d'un objet afin de la/les considérer pour elle(s)-même(s). Nécessité de se détacher du réel, du contexte de la manipulation ou de la représentation.

1°) La manipulation

Manipuler = agir sur des objets tangibles ou symboliques. Apprendre par le faire en s'appropriant la situation, s'en faire une première représentation pour conduire à une anticipation d'une solution au pb.
Manipulation = étape intermédiaire permettant d'engager un travail cognitif.
Le matériel change de statut au cours de son utilisation : d'abord pour constater, observer, puis pour valider ce que l'on a anticipé.
Manipulation active : l'élève mobilise des représentations mentales et ses connaissances des nombres pour résoudre le problème.
Manipulation passive : les élèves ont accès aux objets et peuvent se contenter de trouver le résultat en les dénombrant.

2°) De la manipulation à la représentation symbolique

Etape fondamentale où l'action est transformée en image mentale grâce à une image, un dessin, une photo, un pictogramme, un schéma, …
Les représentations d'abord proches des objets tangibles évoluent vers des représentations plus abstraites et génériques (schémas, écritures mathématiques).

L'exemple suivant illustre la progressivité, au niveau de la maternelle et au CP :

« *Au supermarché, j'ai acheté 4 pommes rouges et 2 pommes vertes. Combien ai-je de pommes dans mon panier ?* »

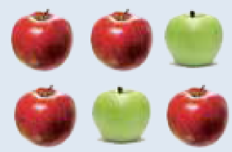
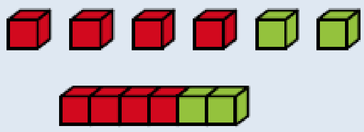
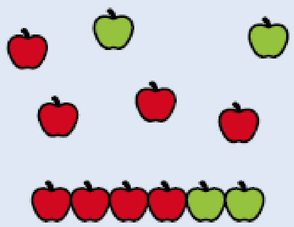
MODE SENSORI-MOTEUR[38]	**Manipulation d'objets tangibles proches de la réalité :** 	**Manipulation d'objets tangibles figuratifs :** 
MODE IMAGÉ	**Représentations imagées des objets tangibles proches de la réalité :** 	• **Représentation avec un schéma :**  • **Représentation présymbolique (schéma en barres + écriture symbolique) :** 
MODE SYMBOLIQUE	**Écriture en langage mathématique :** $4 + 2 = 6$	

Figure 19. Progression des représentations.

A la maternelle les problèmes sont définis comme « des situations dans lesquelles la réponse n'est pas d'emblée disponible. Donc, le fait de pouvoir agir sur les objets (les déplacer ou non) constitue une première étape vers une manipulation mentale et provoque la nécessité d'anticiper la réponse lorsque les objets sont absents ou éloignés. Ces situations doivent être reprises à l'entrée au CP.
Dès la maternelle et pour préparer à une première représentation, le matériel tangible sera peu à peu remplacé par des objets manipulables (cubes emboitables sécables)

<u>La place de la verbalisation dans l'accès à l'abstraction</u>
Manipulation et représentation s'accompagnent obligatoirement d'étapes de verbalisation. Elles permettent de mettre en mots et d'expliciter l'action sans la produire ou la représenter visuellement afin d'accéder aux concepts mathématiques et à l'abstraction.

Pour le professeur	- phase d'étayage importante - il verbalise les étapes de sa démarche pour que les élèves puissent verbaliser les leurs - fait des analogies avec situations déjà connues - lien explicite avec compétences et connaissances à mobiliser - formule et reformule le langage mathématique précis	**Questions du professeur pour aider la verbalisation de l'élève :** - passage de la manipulation passive à la manipulation active : « A quoi réfléchis-tu ? / Où en es-tu ? / Que dois-tu faire pour … ? » - passage de la manipulation active à la formulation des procédures : « Comment tu as-fait ?/Peux-tu me dire ce qui va se passer si … ?/Crois-tu qu'il va se passer …si… ? » - passage de la manipulation de la manipulation active à la validation des solutions proposées : « Peux-tu dire quelle solution tu as trouvée ?/Peux-tu vérifier ? » - de la formulation, de l'explicitation des procédures à la validation des solutions proposées : « Comment fais-tu ?/ Peux-tu me donner un exemple ?/Comment peux-tu en être certain ? »
Pour l'élève	- explicite ses actions, sa démarche, ses solutions - produit des arguments mathématiques pour valider ses solutions - retour réflexif sur son raisonnement - compare ses stratégies à celles des autres → vers l'émergence d'un référentiel commun - renseigne le professeur sur l'étayage à proposer le cas échéant	

<u>Faire évoluer les procédures</u>
Trois types de stratégies codifiées :

- Stratégie 1 : dénombrements plutôt élémentaires
- Stratégie 2 : dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections
- Stratégie 3 : de calcul ou proche du calcul, plus ou moins explicitées ou formalisées

Enseigner le RDP c'est faire évoluer les stratégies progressivement vers la stratégie 3 avec la production d'écritures mathématiques.
VOIR DES PRODUCTIONS D'ELEVES ET PROCEDURES ASSOCIEES pages 87 et 88

Problèmes arithmétiques au CP et au cycle 2 : la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Rôle important de la modélisation

Attention :

Représenter : traduire la situation par un dessin ou un schéma par toujours traduisibles par un calcul.

Modéliser : c'est traduire mathématiquement la situation, amener à la procédure puis au calcul. Elle rend la réalité calculable.

<u>Lien entre numération et calcul</u>

Numération : relations entre les nombres. Les situations de décomposition et recomposition de collections permettent d'automatiser les relations entre les nombres dès le C1.

Calcul : Les problèmes de type additif (réunion de collections pour trouver un tout, scission d'une collection pour trouver une partie) font appel au calcul.

Attention, travailler les problèmes additifs est aussi l'occasion de renforcer le travail sur la numération en utilisant un matériel adapté (manipulation de cubes) et en choisissant les nombres qui conduisent à regrouper 10 unités pour former une dizaine ou à casser une dizaine entière si besoin.

Progression possible :

- Utilisation de cubes emboitables ;
- Cubes remplacés par des représentations imagées des cubes et des barres de 10 cubes ;
- Schémas accompagnés de l'expression symbolique du calcul à effectuer et du résultat dès la période 2.

VOIR EXEMPLES DE SITUATIONS ET DE REPRESENTATIONS pages 89 à 92

<u>Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma grâce au matériel</u>

Le passage du dessin eu schéma repose sur les points suivants :

- Les variables didactiques que constituent le choix du matériel proposé aux élèves , la taille des nombres dans les énoncés ;
- Les connaissances mobilisables en calcul ;
- Explicitation par le professeur de l'objectif, des connaissances et compétences visées da l'activité.

→ tous les matériels ne sont pas équivalents quant aux représentions qu'ils permettent de générer.

Supports utiles à la modélisation : cubes emboitables, matériel multi base, réglettes.

Progression :

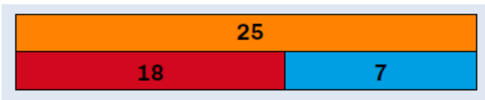
utilisation de petits nombres	Familiarisation avec les représentations
nombres plus grands	Dépasser le dessin figuratif et le comptage un à un Introduction des premières représentations schématiques et symboliques
Schémas du type « schéma en barre »	Progressivité de sa construction nécessairement pensée et harmonisée du C2 au C3 Permet de reconnaître les structures mathématiques des problèmes, opérations et procédures sous-jacentes Un même modèle de schéma pour quatre types de problèmes.

EX DE PROBLEMES DE TYPE PARTIES-TOUT ET MODELISATION PROGRESSIVE PAR LE SCHEMA EN BARRE page 94 et 95

La modélisation par le schéma en barre est introduite par l'enseignant lors de la mise en commun. L'enseignant raconte « l'histoire » du problème en prenant appui sur le schéma. Il met en mots la relation entre les nombres et l'opération qui conduit au calcul. Les automatismes installés pour les problèmes additifs vont rendre l'introduction de la soustraction naturelle.

<u>Les problèmes multiplicatifs</u>
Au CP, ils reposent sur des valeurs numériques adaptées aux procédures des élèves (addition itérée par exemple) qui permettent de construire le sens de la multiplication et de la division : situations de parts égales, on cherche le tout, la valeur d'une part (partition), le nombre de part (quotition) souvent plus difficiles à résoudre.
Au CP, privilégier la manipulation, les représentations imagées proches de de la situation pour rencontrer des configurations rectangles (EX tablettes de chocolats sécables).
Le professeur s'attachera à souligner aux élèves la « symétrie » qui existe entre les problèmes multiplicatifs et les situations de partage pour faire comprendre le lien qui existe entre ces deux types de problèmes.

Quelques éléments du continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3
Enseignement de la RDP à penser dans une construction pluriannuelle cohérente et progressive.
Quelques points qui sont à considérer dans ce continuum sans être des objectifs d'enseignement au CP :
<u>Les sens des opérations et la « symétrie » entre les opérations</u>



Comprendre que les deux opérations « 25-7=18 » ou « 25-18=7 » découlent de la relation additive 18+7=25 peut être facilité au travers de schémas avec deux barres qui permettent de percevoir la relation entre les 3 nombres

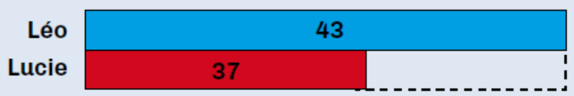
Cette symétrie des opérations est possible dès le CP avec des petits nombres (compléments à 10, à 20, …) avant généralisation en étendant le domaine numérique.

<u>Lien avec la comparaison</u>
Les problèmes de comparaison qui font appel aux formulations « de plus » et « de moins » sont plus difficiles → répondre toujours en premier lieu à la question « qui est le plus grand, qui en a le plus, … ? »
Au CE1, la modélisation par le schéma en barres va permettre de représenter la grande quantité, matérialiser la différence et se ramener à des problèmes de parties-tout.

Exemple : *« Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ? »*

Ce problème peut être traité au CP en s'appuyant sur la numération avec la représentation en barres de 10 et des cubes unité.

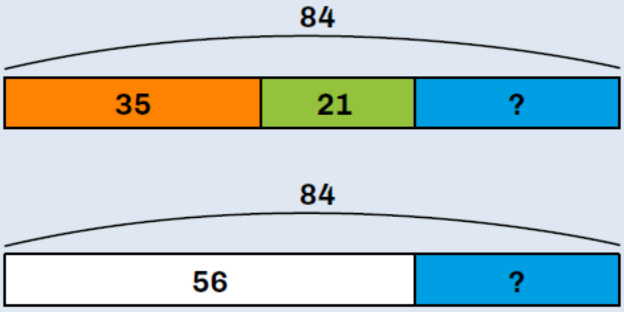
À partir du CE1, la modélisation par le schéma en barres va permettre tout au long des cycles 2 et 3 de visualiser les quantités en jeu : représenter la grande quantité, matérialiser éventuellement la différence et se ramener par la suite à des problèmes de parties-tout[45] :



<u>Résolution de problèmes complexes</u>

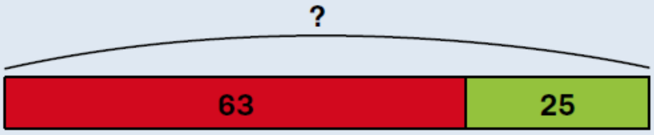
La modélisation installée pour les schémas de type parties-tout donne une stratégie d'enseignement pour apprendre à résoudre des problèmes à deux étapes en les ramenant explicitement et visuellement à des problèmes à une étape.

Exemple 1 : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?* »

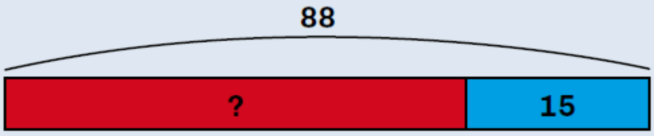


Exemple 2 : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y a-t-il alors de livres dans la bibliothèque de la classe ?* »

- Étape 1 : 25 livres de plus dans la bibliothèque

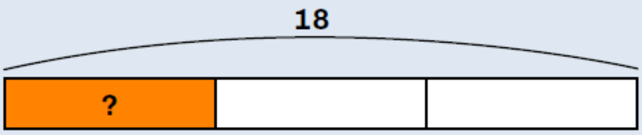


- Étape 2 : on emprunte 15 livres



<u>Lien avec l'introduction ultérieure de la fraction</u>

Une situation de partage peut être résolue avec un schéma multiplicatif à l'aide de manipulation de cubes (EX : au C2 partager 18 images entre 3 enfants pourra être représenté de la même manière que donner 1/3 de 18 billes à un camarade au C3).



Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation

Dès le CP, L'activité des élèves et le vécu commun de la classe se structurent tout au long des différentes étapes (manipulation active, verbalisation, représentation de la situation) de la démarche de RDP grâce à des écrits de différentes natures mis en place par le professeur.

<u>Les supports des élèves</u>

- Le cahier personnel (cahier du jour ou cahier spécifique aux mathématiques) : il évite l'écueil de l'écrit éphémère, conserve la trace des essais-erreurs, des procédures, des modes de représentation, garde la mémoire des problèmes rencontrés.
- Le cahier de référence en mathématiques (cahier de leçons) : support complémentaire pour structurer l'enseignement explicite de la RDP. Renferme des écrits formalisés lors de la phase d'institutionnalisation (traces de savoirs et compétences travaillées)

<u>Les outils collectifs</u>

- L'affiche (lisible, claire, succincte) est l'écrit de référence du vécu commun de la classe. Elle correspond à un problème de référence rencontré et met en lumière les étapes de la RDP (énoncé, représentations schématiques, modélisation) voir exemple p. 101
  Le maître y fait régulièrement référence pour formaliser, guider le raisonnement, favoriser les analogies (c'est comme le problème de …)
- En cours d'année les affiches sont complétées et évoluent.

<u>Le rôle essentiel de l'institutionnalisation</u>

Deux niveaux :

- Mises en commun en cours de séance (engagement et compréhension de tous).
- Institutionnalisation finale pour structurer la trace d'un savoir partagé (références « construites avec les élèves ») idéalement commune au niveau de l'école voire du réseau d'écoles.

En résumé

- Il s'agit **d'enseigner la résolution de problèmes**. L'enseignement explicite de la résolution de problèmes s'appuiera sur des temps d'institutionnalisation guidés par le professeur qui permettront de hiérarchiser les procédures en prenant en compte leur efficacité et leur économie. **L'objectif n'est cependant pas d'enseigner une typologie de problèmes.**

- L'enjeu est de permettre aux élèves de réussir **seuls** les problèmes arithmétiques relevant du CP en enrichissant la mémoire des problèmes de chacun [49]. Le temps consacré à la résolution des problèmes basiques doit donc être conséquent et régulier. Il importe aussi de proposer des problèmes à deux étapes (problèmes complexes).

- Le triptyque « **manipuler, verbaliser, abstraire** » offre des repères pour concevoir l'enseignement de la résolution de problèmes. L'articulation entre matériel, représentations associées et les notions mathématiques convoquées est essentielle. Il convient donc à ce titre de privilégier dès le CP des matériels décontextualisés tels que les cubes emboîtables.

- Articuler représentation et modélisation : l'appui dès le CP sur des représentations à l'aide de schémas (notamment des schémas en barres) pourra faciliter l'accès à la modélisation et préparer un continuum didactique du cycle 2 au cycle 3 pour l'enseignement de la résolution de problèmes.

Chapitre IV: Quels matériels et pour quelle utilisation en mathématique au CP? (page 103 à 114)

Proposé individuellement, le matériel est utilisé par l'élève comme une entrée concrète à la notion travaillée. Le matériel doit donc être en quantité suffisante pour une mise à disposition auprès de chaque élève.

Matériel = tout objet physique utilisé pour l'apprentissage des mathématiques.

4 principes généraux d'utilisation du matériel:

- le temps d'utilisation du matériel qui doit être régulière, constante et sur une longue période (supérieure à un an).
- la transparence du matériel utilisé: commencer par des représentations figuratives et avancer petit à petit vers des représentations plus abstraites.
- la nature du matériel: utiliser un matériel sobre qui ne donne pas envie de jouer, et éviter l'utilisation d'un matériel qui ressemble trop à des objets de la vie de tous les jours.
- l'explicitation du lien entre le matériel et le concept qu'il représente qui permet à l'enfant de diriger son attention directement vers les caractéristiques pertinentes du matériel.

Remarque sur les outils et logiciels du numérique éducatif: les TBI permettent de garder en mémoire les différentes procédures que les élèves ont écrites ou verbalisées et sur lesquelles les élèves et les professeurs peuvent revenir. Ils offrent une dimension collective intéressante, complémentaire du matériel individuel (Voir par exemple https://micetf.fr/ (et plus particulièrement https://micetf.fr/numop pour le lien avec le matériel de numération utilisé individuellement en classe). Le portail Prim à bord sur Éduscol (https://eduscol.education.fr/cid96257/prim-a-bord-le-portail-premier-degre.htm)propose de nombreux articles concernant l'utilisation des TNI (ou TBI).

+ exemples d'application ou de logiciels:

Voir la liste proposée par la Délégation académique au numérique éducatif (Dane) d'Aix-Marseille, « Panorama des outils numériques au service des apprentissages » : https://www.pedagogie.acaix-marseille.fr/jcms/c_10637631/fr/panorama-des-outilsnumeriquesau-service-des-apprentissages

Des ressources en angalis sur Freudenthal Institute : http://www.fi.uu.nl/publicaties/subsets/html5_en/

Calcul@tice propose aux élèves de CP (et au-delà), en travaillant seul ou par deux, de résoudre une série d'épreuves en lien avec le calcul mental. Cet outil propose en outre une possibilité de parcours adaptés en fonction des difficultés des élèves : https://calculatice.ac-lille.fr/spip.php?rubrique1

L'attrape-nombres : conçu par l'unité Inserm-CEA de neuro-imagerie cognitive : http://www.attrape-nombres.com/an/home.php

La course aux nombres: http://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php

Le Partenariat d'innovation et intelligence artificielle P2IA : https://eduscol.education.fr/cid118880/partenariat-d-innovationet-ia.html

Matériels incontournables devant être mis à disposition des élèves dans les classes

<table>
<tr><th>Matériel</th><th>Utilisation</th></tr>
<tr><td>cubes emboîtables sécables</td><td>

Numération écrite chiffrée et orale: avec une même couleur, permet de conceptualiser une dizaine sous la forme d'un groupement de 10 unités (en emboîtant mais aussi sous forme de isolées)

Figure 38. Illustrations de 34 unités = 14 unités 2 dizaines = 3 dizaines 4 unités.

Pour le calcul, avec des couleurs différentes:

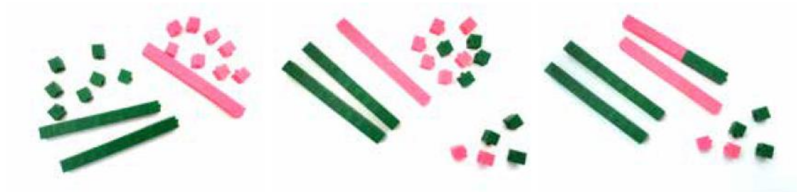


Figure 39. Illustration de 27 + 18 = 45.

Pour la résolution de problèmes arithmétiques, et notamment par le modèle en barres.

</td></tr>
<tr><td>la frise numérique</td><td>

Pour travailler la numération orale (PC et GC)

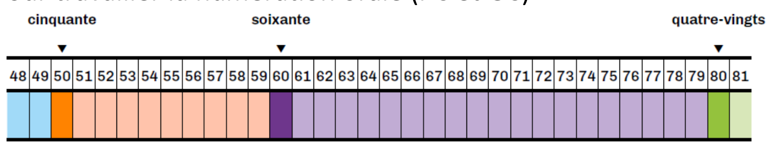


Figure 40. Exemple d'une frise numérique faisant apparaître petite et grande comptines.

Pour travailler la numération écrite chiffrée:

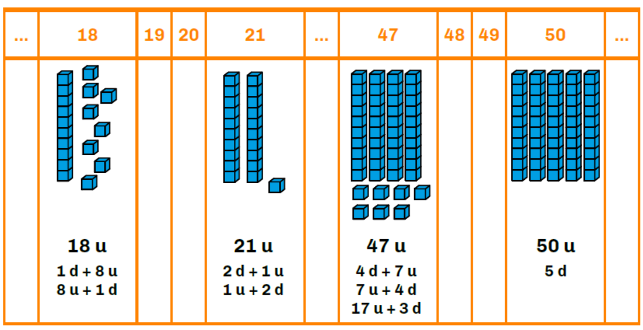
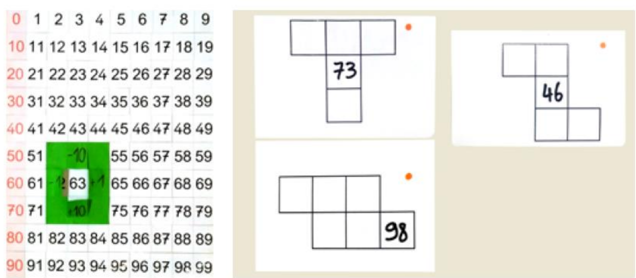


Figure 41. Autre exemple de frise numérique, pour travailler la numération écrite chiffrée.

</td></tr>
<tr><td>Tableau des nombres</td><td>

Pour monter les régularités du système de numération écrite chiffrée

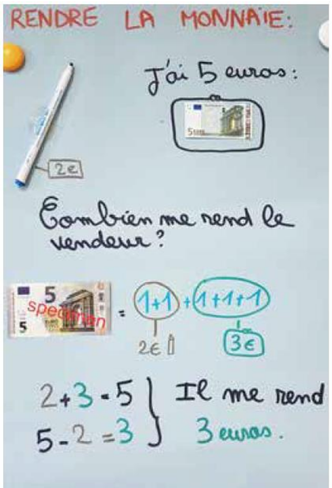


Figures 42 et 43. Exemples de tableaux des nombres.

</td></tr>
</table>

Matériels complémentaires pouvant être mis à disposition des élèves

A utiliser notamment dans des phases de remédiation.

Description	Intérêts/limites	Progression
Matériel de numération en base 10 	Limiter l'activité à un nombre d'unités et de dizaines inférieure à 10.	Proposer régulièrement aux élèves des collections où le nombre d'unités sera supérieure à 10. Matériel à utiliser quand les élèves ont compris la notion de dizaine. Il ne doit pas intervenir au début de l'apprentissage.
Tableau de numération  dizaines | unités d | u	Ne permet pas d'aborder l'aspect décimal de la numération écrite chiffrée, enferme le nombre dans des cases sans lui donner du sens. Prend du sens pour les additions posées.	Il est clairement recommandé de ne pas introduire trop précocement le tableau de numération, voire de s'en passer en CP.
La monnaie  	Outil non transparent physiquement : un billet de 10 n'est pas l'assemblage de physique de 10 pièces de 1. Intérêt dans la résolution de problèmes liés à des contextes de coût, d'achat, ...	Au CE1: billets de 100€, et centimes d'euros.

En résumé

- L'utilisation de matériel doit être régulière et constante sur une longue période. Le matériel doit être le plus transparent possible, il ne doit pas ressembler à des objets de la vie courante et le lien qui le lie avec le concept qu'il représente doit être explicité par l'enseignant.

- Les cubes emboîtables sécables, la frise numérique ainsi que le tableau des nombres sont considérés comme des matériels incontournables devant être mis à la disposition de chaque élève pour qu'il les utilise de façon individuelle.

- D'autres matériels, comme des compteurs, du matériel multibase, de la monnaie ou encore des tableaux de numération peuvent aussi être proposés aux élèves, en complément des matériels cités précédemment.

Chapitre V : Le jeu dans l'apprentissage des mathématiques (pages 115 à 128)

Jeu = matériel ludique + attitude ludique du joueur.

nom du jeu	âge/durée	objectif	règle
Lucky Luke	3 ans/ inférieure à 5 min	travailler les décompositions additives des nombres jusqu'à 10.	Le maître du jeu annonce un mot nombre et au signal, les joueurs qui ont les mains dans le dos, montrent leurs doigts.
Le bon débarras	2 joueurs/ durée d'environ 10 min	travailler les compléments à 10 à partir de deux cartes ou plus.	Le vainqueur est celui qui se débarrasse le plus vite possible de toutes ses cartes. Un simple jeu de cartes suffit en conservant les cartes de 1 à 9 en quatre exemplaires. Chaque joueur reçoit dix cartes qu'il pose à plat de manière visible, le reste non visible constitue le talon. Le premier joueur retourne la première carte du talon et va chercher parmi ses cartes le complément à 10. S'il trouve le complément avec une ou plusieurs de ses cartes, il se débarrasse de celle(s)-ci ; s'il ne le trouve pas, il passe son tour. Le vainqueur est celui qui s'est débarrassé le premier de ses dix cartes.
Cartes recto-verso	À partir de 2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.		Sur le recto des cartes figurent les calculs à effectuer, de l'autre côté (verso), les résultats. Les cartes sont étalées sur la table, côté recto visible. Un élève propose une carte-question et l'autre y répond. On retourne la carte ; si la réponse est correcte, l'enfant qui a répondu prend la carte, sinon, c'est celui qui a questionné qui la prend. Les rôles sont inversés à chaque partie. Celui qui a le plus de cartes à la fin de la partie a gagné. Ce jeu peut aussi se fabriquer aisément avec des bouchons de récupération.
Le Yams	De 2 à 4 joueurs, durée d'environ 15 min.	mobilier des calculs de doubles ou autres additions	Il nécessite cinq dés et trois lancers par joueur à chaque tour. Le premier joueur lance les cinq dés, il met de côté les constellations de son choix et relance les autres dés. Chaque trio de lancers conduit les élèves à calculer le total de points et ainsi à mobiliser des calculs de doubles ou autres additions pour compléter sa feuille de jeu.

Le jeu, nécessaire... mais pas suffisant!

Le jeu, nécessaire … mais pas suffisant !
Pris en charge lors de la conception de la situation sous l'aspect de sa valence didactique et ludique, le jeu est un moteur de dévolution (investissement intellectuel et effectif) qui amène l'élève à faire des choix, prendre des décisions, anticiper un résultat → plaisir du jeu permet de développer des stratégies et les optimiser grâce à la verbalisation.
Bénéfices du jeu en mathématiques :

- Sens donné aux notions mathématiques en se décentrant des objets d'apprentissage ;
- Développement de compétences (logique, rigueur, concentration, mémoire, abstraction) ;
- Usage à différents moments de l'apprentissage (introduction, automatisme, approfondissement, remédiation) ;
- Place de l'écrit différente de celle des exercices d'entrainement traditionnels.

Analyses de jeux mathématiques p. 119 à 125

- <u>Jeu du saladier</u> (connaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 10, calculer le complément à 10 ou à un nombre inférieur à 10)
- <u>Jeu de déplacement sur piste</u> (calculer mentalement à partir d'anticipation de déplacements)
- <u>Le chiffroscope</u> (écrire un nombre en chiffres à partir d'une décomposition en unités de numération)

Focus : Critères permettant d'analyser le potentiel didactique d'un jeu donné au sens d'une activité ludique :

Objectifs visés et place dans la séquence d'apprentissage	• Le jeu permet-il d'atteindre l'objectif d'apprentissage qui lui est associé ? • Est-il utilisé comme situation d'introduction (d'une notion), d'entraînement, d'évaluation ?
Accompagnement et présence du professeur	• Le professeur doit-il être présent ? Quel est son rôle ?
Communication et échanges (verbalisation – formulation)	• Le jeu favorise-t-il la communication et les échanges entre élèves ? • Une phase de verbalisation est-elle prévue (avec les autres joueurs, avec la classe, avec le professeur) ?
Complexité des règles	• Les règles sont-elles suffisamment simples pour que l'élève puisse les comprendre rapidement ? Peuvent-elles évoluer au cours de l'apprentissage ? • Le nombre de joueurs est-il important pour l'apprentissage ? (On peut jouer seul, à plusieurs les uns « contre » les autres, ou en équipe – jeu collaboratif.) • Les élèves peuvent-ils facilement jouer de façon autonome (sans la présence du professeur) ? À quelles conditions (support de suivi, connaissance parfaite des règles ? Comment le professeur accède-t-il alors aux procédures ?...) ?
Dans le cas de logiciels ou de jeux sur tablette	• Quelques points de vigilance : – la cohérence par rapport aux programmes ; – la diversité des tâches proposées ; – la mobilisation effective des connaissances pour réussir (et non d'autres stratégies ne reposant pas sur des connaissances mathématiques) ; – la qualité des aides mises à disposition ; – le suivi des progrès et des résultats des élèves.
Évolution du jeu en lien avec la progression et la différenciation	• Peut-on jouer sur certaines variables pour faire évoluer le jeu (et bloquer certaines procédures mathématiques ou non, par exemple) ou pour différencier ?
Institutionnalisation et traces écrites	• Une institutionnalisation et/ou des traces écrites sont-elles prévues en lien avec le jeu (apprentissage d'une notion, mémorisation d'une procédure, etc.) ?
Validation	• L'élève peut-il être tour à tour joueur et arbitre (en lien avec la question de la validation) ? • Le jeu est-il autocorrectif ?

En résumé

- Pour que le jeu permette des apprentissages mathématiques, il est nécessaire qu'il ait été explicitement pris en charge dans la conception de la situation d'enseignement sous l'aspect d'une double valence didactique et ludique. Le jeu est alors vu dans la situation comme moteur de la dévolution, l'élève s'investissant tant au niveau intellectuel qu'au niveau affectif. Il se rapproche des mathématiques en ce qu'il amène l'élève à faire des choix, prendre des décisions, anticiper un résultat.

- À travers le jeu, les élèves vont prendre plaisir à développer des stratégies et des raisonnements mathématiques, avec pour objectif l'apprentissage de stratégies et leur optimisation par des phases de verbalisation pour réussir le défi relevé.

Chapitre VI Comment analyser et choisir un manuel de mathématiques pour le CP ? (pages 129 à 138)

Usage des manuels en classe
Le manuel permet l'identification de savoirs mathématiques précis et l'entrainement à la maîtrise de ces avoirs. Mais une place parfois restreinte est donnée à la manipulation et à la RDP. L'exploration des seuls choix du manuel ne peut suffire. Le manuel est à envisager comme un support pour accompagner l'élève en complément d'autres activités (manipulation, jeu).

Approcher globalement le manuel (p. 131 à 134)
- lire les avant-propos dans les guides du maître, lire rapidement quelques séances, repérer le ciblage éventuels de points de vigilance, repérer d'éventuels manques.
Avoir une attention sur les éléments suivants : le manuel de l'élève, le guide du maître, l'organisation de la programmation, le format des enseignements, le format des séances, l'institutionnalisation, la différenciation, l'évaluation, les ressources complémentaires mises à disposition.

Approcher le manuel sous l'aspect des contenus
Points de vigilance : programmation et rythme d'apprentissage attendu, place de la numération orale et de la numération écrite chiffrée, place du calcul mental (progression, description de séquences,

séances diverses, mémorisation faits numériques, automatisation et procédures de calcul, lien entre calcul posé et propriétés de la numération écrite chiffrée, place de la RDP, structure globale des séances d'apprentissage.

En résumé

Dans le cadre du travail de conception de l'enseignement, le manuel est un appui très largement exploité. En mathématiques, son choix pourra être encadré par les points essentiels suivants :

— la programmation proposée, au regard de l'organisation générale du manuel et de sa conformité aux instructions officielles ;

— la construction du nombre avec la présence d'un travail articulé autour des deux systèmes de numération orale et écrite chiffrée ;

— la progression en calcul mental (séquences : mémorisation des faits numériques, développement et automatisation de procédures de calcul) et l'approche du calcul posé ;

— la régularité de la résolution de problèmes dans tous les domaines ;

— la structure globale des séances d'apprentissage proposées, en termes de manipulation, d'institutionnalisation, d'entraînement, de différentiation, d'évaluation.

Chapitre VII : programmer sa progression au CP (pages 139 à 148)

Une **proposition** de programmation qui indique des repères forts sur les apprentissages.

Nombre

<table>
<tr><th></th><th>Système de numération oral</th><th>Construire le système de numération écrit chiffré</th></tr>
<tr><td>P1
P2</td><td>Renforcement des connaissances de la grande comptine de un à dix-neuf et de la petite comptine de un à neuf pour construire une frise numérique structurée au moins jusqu'à trente.
— Usages sociaux tels que la date.
— Dénombrement, estimation et comparaison de petites collections (jusqu'à vingt).
— Comparaison de nombres selon leur nom (ordre d'arrivée dans la comptine) – au moins jusqu'à trente.
— Calcul mental (jusqu'à vingt) : techniques et explicitation, lien avec les problèmes arithmétiques.</td><td>1er temps : la dizaine
2d temps : construction du système de numération écrit chiffré

Remarque : 2 types d'itinéraire d'enseignement sont ici possibles : nombres dont les noms sont connus des élèves/ tous les nombres jusqu'à 100.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P3
P4
P5</td><td>— Reprise et poursuite de la structure de la comptine numérique en petite comptine de un à neuf et grande comptine de un à dix-neuf pour construire une frise numérique structurée (progressivement jusqu'à cent).
— Comptine de dix en dix (dix, vingt, etc.).
— Rencontre de l'écriture littérale en français des noms des nombres (progressivement jusqu'à cent).
— Dénombrement (procédure ≪ nom du nombre ≫), estimation et comparaison de quantités (progressivement jusqu'à cent).
— Comparaison, ordre et encadrement de nombres selon leur nom (ordre d'arrivée dans la comptine) – progressivement jusqu'à cent.
— Calcul mental (jusqu'à vingt puis au-delà) : techniques et explicitation, lien avec les problèmes arithmétiques.</td><td>Si ce n'est pas encore fait, poursuivre jusqu'à 100 la construction de la numération écrite chiffrée durant la période 3.
— Dénombrement (procédure ≪ écriture chiffrée ≫), estimation et comparaison de quantités (jusqu'à 100).
— Travail de l'aspect positionnel et de l'aspect décimal en utilisant des collections partiellement organisées en dizaines.
— Exercices avec les unités de numération (jusqu'à 100).
— Comparaison, ordre et encadrement de nombres (utilisation de la signification des chiffres) – jusqu'à 100.
— Addition posée et initiation au calcul de la soustraction (jusqu'à 100) : techniques et justification, lien avec les problèmes arithmétiques.</td></tr>
<tr><td colspan="2">— Lire et écrire les nombres (jusqu'à 100).
— Dénombrement, estimation et comparaison de quantités (jusqu'a 100) : deux procédures à enseigner, l'une privilégiant la numération orale (procédure ≪ nom du nombre ≫), l'autre la numération écrite chiffrée (procédure ≪ écriture chiffrée ≫).
— Calcul mental, en ligne et pose.
— Comparaison, ordre et encadrement de nombres (jusqu'à 100).
— Repérage d'un rang ou d'une position (jusqu'à 100).
— Problèmes arithmétiques (jusqu'à 100).</td></tr>
</table>

Calcul

	Calcul mental	Calcul en ligne	Calcul posé
P1 **P2**	Les apprentissages se fondent sur une bonne connaissance de la comptine numérique (numération orale) jusqu'à 20 puis 30. **Faits numériques** - Tables d'addition : introduction de certains résultats. - Double des nombres (nombres jusqu'à 5 puis jusqu'à 10). - Compléments à 10 (nombres jusqu'à 10). - Somme de deux nombres (résultat inférieur à 10). - Décomposition additive des nombres (nombres jusqu'à 10). **Procédures élémentaires** - Ajout de 1, retrait de 1 (nombres jusqu'à 30). - Ajout de 2, retrait de 2 (nombres jusqu'à 30). - Ajout de 10 (aux nombres jusqu'à 10). - Soustraire à 10 un nombre < ou = 5 (10-3). - Commutativité de l'addition (5+3=3+5). **Combinaisons de procédure** - Addition de deux nombres dont le résultat est < 20, sans franchissement de dizaine (12+6). - Soustractions de type a-b avec a < 20 et b <10 Les calculs , les procédures et les réponses sont indiqués soit à l'oral soit par des écritures chiffrées. **Symboles mathématiques** - Utilisation progressive des symboles = = - (en période 2)		
P3 **P4** **P5**	**Faits numériques** - Tables d'addition (nombre jusqu'à 10) et compléments à 10. - Double des dizaines entières (résultats jusqu'à 100). - Moitié des nombres pairs (nombres jusqu'à 20). **Procédures élémentaires** - Ajouter 10, soustraire 10 (nombres jusqu'à 100). - Dans le cadre de la construction des tables d'addition (suite et fin) : nombres jusqu'à 20 : presque-doubles (6+5), appui sur 10 (7+5 = 10+2 =12). - Commutativité et associativité de l'addition (nombres jusqu'à 100) - Addition et soustraction des dizaines entières (nombres jusqu'à 100).	Traduire et enrichir les calculs effectués mentalement, grâce à un recours à l'écrit et à l'introduction progressive et graduée d'un formalisme. - Addition de deux nombres entiers sans franchissement de dizaine (35+4) puis avec franchissement de dizaine (37+53) (nombres jusqu'à 100). - Soustraction de deux nombres sans retenue (84-12 ; 35-4 ;78-5). - Soustraction de deux nombres avec franchissement d'une dizaine (15-6 ; 13-5) type a-b avec b<10.	- Introduction de l'algorithme de l'addition posée (nombres jusqu'à 100). - Entrainement dans divers cas, notamment avec des sommes de 3 termes générant des retenues de 1 ou 2 dizaines. Symboles mathématiques - Poursuite du travail sur les symboles =, + ; - - Introduction éventuelle du symbole X (période 5 ou début CE1).

Résolution de problèmes

	Problèmes additifs	Problèmes multiplicatifs
P1 **P2**	- Problèmes de parties-tout avec recherche du tout (nombres inférieurs à 10 pour chacune des parties). - Problèmes de partie-tout avec recherche d'une des parties (en période 2, nombres inférieurs à 10). - Problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de la quantité finale (nombres inférieurs à 10 pour chacune des parties). Les écritures mathématiques avec les symboles ≪ + ≫, ≪ − ≫ et ≪ = ≫ sont proposées par le professeur et discutées avec les élèves après que ceux-ci ont résolu le problème. Elles ne sont pas exigées des élèves lors de cette résolution. Afin qu'ils prennent du sens, il est nécessaire de proposer dès que possible des séances ou l'un et l'autre des signes ≪ + ≫ et ≪ − ≫ sont mobilisés.	
P3 **P4** **P5**	**Reprise** des catégories de problèmes vues en périodes 1 et 2 sur un champ numérique plus étendu - valeurs numériques selon la progression en calcul (mental, en ligne et pose) : - problèmes de parties-tout avec recherche du tout, avec éventuellement 3 parties; - problèmes de parties-tout avec recherche d' une des parties; - problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de la quantité finale. Introduction de nouveaux types de problèmes : - problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de la transformation. Certains problèmes complexes pourront être proposes pour préparer le CE1 (en commençant par travailler avec des nombres inferieurs a 20), par exemple : - problèmes de parties-tout mettant en jeu trois collections avec recherche d'une des parties (2 étapes); - problèmes de transformation mettant en jeu deux transformations successives avec recherche de l'état final (2 étapes) ; - problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de l'état initial (périodes 4 ou 5) ; - problèmes de comparaison, le critère de comparaison étant connu (périodes 4 ou 5). Les écritures mathématiques avec les symboles ≪ + ≫, ≪ − ≫ et ≪ = ≫ sont encouragées à partir de la période 2. Leur utilisation est progressivement attendue pour les problèmes introduits en périodes 3 à 5.	**PROBLEMES MULTIPLICATIFS (AVEC TROIS NOMBRES EN JEU INFERIEURS A 30)** Les stratégies de résolution s'appuient sur du matériel de manipulation faisant intervenir la nature multiplicative des nombres en jeu, des représentations figuratives ou avec des schémas. L'enjeu est de construire le sens des opérations sans difficulté liée au calcul. — Recherche du produit. — Recherche du nombre de parts (partage égal). — Recherche de la valeur d'une part.

En résumé

- Il existe certaines marges de manœuvre dans la programmation. Celle qui est proposée dans ce chapitre permet d'indiquer des repères forts sur les apprentissages, mais aussi ce qui peut être adapté selon le travail en concertation sur le niveau (en particulier les classes de CP dédoublées), sa classe, ses élèves, pour que chaque professeur puisse se l'approprier[74].

- Le programme officiel fixe des objectifs de cycle, avec des repères par année. Les objectifs de CP sont mis en perspective avec ceux du cycle 2. Le choix de la programmation au CP concerne donc toute l'équipe enseignante de l'école.